



JEL: A22, C88

DOI: 10.62911/ete.2025.03.01.05

GeoGebra with augmented reality as a tool for teaching mathematics in the training of specialists in the field of management and administration

Citation:

Pylypenko O. (2025). GeoGebra with augmented reality as a tool for teaching mathematics in the training of specialists in the field of management and administration. Scientific and practical journal "Economics and technical engineering". Vol. 3 No. 1 (2025), 54-65. <https://doi.org/10.62911/ete.2025.03.01.05>

Olha Pylypenko

PhD, Separate structural unit
"Professional College of Economics and Technology of State University of Economics and Technology", Kryvyi Rih, Ukraine

e-mail: banadaolga96@gmail.com

 ORCID ID: 0000-0003-0493-8429

Received: 05/06/2025

Accepted: 11/06/2025



Abstract: The rapid development of digital technologies and the increasing demand for practice-oriented education have led to a rethinking of approaches to mathematics teaching, especially in the context of training future specialists in the field of management and administration. Mathematical knowledge plays a key role in economic and financial decision-making, which requires a deep understanding of spatial relationships, analytical structures, and quantitative dependencies. However, students in higher education institutions often encounter difficulties in mastering abstract mathematical concepts, which negatively affects their motivation and professional self-identification. This study explores the potential of the GeoGebra software environment with augmented reality (AR) functions as a modern tool for improving mathematics learning among students of financial and economic specialties. The study included a theoretical review of international literature on the use of AR technologies in education and an experimental test involving students majoring in "Finance, Banking, Insurance, and Stock Market". The experimental group used GeoGebra 3D Calculator with AR to solve geometric, algebraic, and financial math problems, while the control group used traditional methods. The results showed improved understanding of spatial concepts, increased motivation, and better results among students who used AR-based visualizations. In addition, project-based learning activities using GeoGebra AR helped students connect mathematical theory with real-world financial applications. The study confirms the effectiveness of integrating GeoGebra AR into the mathematics curricula for higher education institutions and offers methodological recommendations for its implementation. This approach not only improves the quality of mathematical training but also contributes to the development of digital skills and professional competencies of future specialists in the field of management and administration. The integration of innovative tools like GeoGebra AR aligns with global trends in digital education and supports the formation of a more flexible, adaptive, and future-oriented learning environment.

Keywords: GeoGebra; augmented reality; teaching mathematics; spatial thinking; visualization; digital tools; project-based learning.

JEL: A22, C88

GeoGebra with augmented reality as a tool for teaching mathematics in the training of specialists in the field of management and administration

Olha Pylypenko

PhD, Separate structural unit "Professional College of Economics and Technology of State University of Economics and Technology", Kryvyi Rih, Ukraine

e-mail: banadaolga96@gmail.com

 ORCID ID: 0000-0003-0493-8429

Abstract: The rapid development of digital technologies and the growing demand for practice-oriented education have led to a rethinking of approaches to mathematics teaching, especially in training future specialists in the field of management and administration. Mathematical knowledge plays a key role in economic and financial decision-making, requiring a deep understanding of spatial relationships, analytical structures, and quantitative dependencies. However, students in higher education often struggle with abstract mathematical concepts, which affects their motivation and professional self-identification. This study explores the potential of the GeoGebra software environment with augmented reality (AR) as a modern tool for enhancing mathematics learning among students of financial and economic specialties. It includes a theoretical review of international literature on AR technologies in education and an experimental test involving students majoring in "Finance, Banking, Insurance, and Stock Market". The experimental group used the GeoGebra 3D Calculator with AR to solve geometric, algebraic, and financial math problems, while the control group applied traditional methods. The results revealed improved spatial understanding, increased motivation, and better academic performance among students using AR-based visualizations. Additionally, project-based learning activities with GeoGebra AR helped link mathematical theory to real-world financial applications. The study confirms the effectiveness of integrating GeoGebra AR into higher education mathematics curricula and provides methodological recommendations. This approach enhances mathematical training quality and supports the development of digital skills and professional competencies of future specialists in the field of management and administration.

Keywords: GeoGebra; augmented reality; teaching mathematics; spatial thinking; visualization; digital tools; project-based learning.

GeoGebra з доповненою реальністю як інструмент навчання математики у підготовці фахівців галузі управління та адміністрування

Ольга Пилипенко

доктор філософії, Відокремлений структурний підрозділ «Фаховий коледж економіки і технологій Державного університету економіки і технологій», Кривий Ріг, Україна

e-mail: banadaolga96@gmail.com

 ORCID ID: 0000-0003-0493-8429

Анотація: Швидкий розвиток цифрових технологій і зростаючий попит на практико-орієнтоване навчання призвели до переосмислення підходів викладання математики, особливо в контексті підготовки майбутніх фахівців галузі управління та адміністрування. Математичні знання відіграють ключову роль у прийнятті економічних і фінансових рішень, що вимагає глибокого розуміння просторових взаємозв'язків, аналітичних структур і кількісних залежностей. Проте студенти закладів фахової передвищої освіти часто стикаються з труднощами в освоєнні абстрактних математичних понять, що негативно впливає на їхню мотивацію. У цьому дослідженні розглядається потенціал програмного середовища GeoGebra з функціями доповненої реальності (AR) як сучасного інструменту для покращення вивчення математики серед студентів фінансово-економічних спеціальностей. Дослідження охоплює огляд міжнародної літератури щодо застосування AR в освіті та експеримент за участю

студентів спеціальності «Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок». Експериментальна група використовувала GeoGebra 3D Calculator з AR для розв'язання геометричних, алгебраїчних і фінансових задач, тоді як контрольна – традиційні методи. Результати засвідчили покращення розуміння просторових понять, підвищення мотивації та кращі результати у студентів, які застосовували AR-візуалізації. Крім того, проєктні навчальні заходи з використанням GeoGebra AR допомогли студентам пов'язати математичну теорію з реальними фінансовими застосуваннями. Дослідження підтверджує ефективність інтеграції GeoGebra AR у навчальні програми математики у ЗФПО та пропонує методичні рекомендації. Такий підхід не лише покращує якість підготовки, а й сприяє розвитку цифрових навичок і професійних компетентностей майбутніх фахівців.

Ключові слова: GeoGebra; доповнена реальність; математична освіта; просторове мислення; візуалізація; цифрові інструменти; проєктне навчання.

Вступ (Introduction)

У XXI столітті ефективна математична підготовка є критично важливою складовою професійної освіти, зокрема у сферах фінансів, економіки та обліку. Вона забезпечує здобувачів освіти не лише базовими обчислювальними навичками, а й розвиває логічне, аналітичне та просторове мислення, необхідне для прийняття обґрунтованих рішень у реальних економічних ситуаціях. Водночас численні дослідження засвідчують, що студенти закладів фахової передвищої освіти часто стикаються з труднощами у вивченні математики, що пов'язано з її абстрактним характером, недостатньою візуалізацією понять та низькою навчальною мотивацією (Lytvynova et al., 2020; Petrov, Atanasova, 2020).

На тлі цих викликів особливого значення набуває впровадження цифрових технологій у навчальний процес, які сприяють персоналізації освіти та підвищують залучення студентів до пізнавальної діяльності. Однією з таких технологій є доповнена реальність (AR), яка поєднує віртуальні об'єкти з фізичним світом і дозволяє виводити математичні моделі у реальний простір. Потенціал AR як засобу навчання активно досліджується у різних дисциплінах, зокрема у геометрії, фізиці, інженерії та медичній візуалізації (Ibáñez, Delgado-Kloos, 2018; Garzón et al., 2019; Vakaliuk, Pochtoviuk, 2021). Окремі публікації доводять, що AR значно покращує розуміння просторових конструкцій та сприяє розвитку критичного мислення (Garzón, Acevedo, 2020). Дослідження показали, що використання доповненої реальності в поєднанні з проблемно-орієнтованим навчанням покращує математичну комунікацію студентів (Batubara et al., 2022).

Одним із перспективних напрямів використання доповненої реальності в освіті є вивчення планіметрії та стереометрії, що передбачає візуалізацію геометричних об'єктів та динамічне дослідження їх властивостей. Окремі дослідження доводять, що використання інструментів доповненої реальності під час вивчення двовимірної геометрії сприяє кращому розумінню взаємозв'язків між фігурами, розвитку просторового мислення та підвищенню мотивації здобувачів освіти (Rashevskaya et al., 2020).

Серед програмних рішень, що поєднують математичні функції з можливістю AR-візуалізації, вирізняється GeoGebra – динамічне інтерактивне середовище, яке поєднує геометрію, алгебру, аналіз і статистику в єдиному цифровому інструменті. З 2018 року в GeoGebra реалізовано функціонал 3D-відображення у доповненій реальності, який відкриває нові можливості для глибокого осмислення математичних моделей. Попри широке впровадження GeoGebra у шкільну освіту (Cheong et al., 2024; Ibáñez, Delgado-Kloos, 2018; Shabanova et al., 2020), питання використання цієї технології саме у підготовці фінансових фахівців лишається малодослідженим.

На сьогодні існує потреба у переосмисленні змісту та методів математичної підготовки студентів економічного профілю з урахуванням динаміки цифровізації, міждисциплінарності та ринкових запитів на цифрову грамотність. Водночас у літературі спостерігається недостатнє узагальнення прикладних кейсів використання AR у математичних дисциплінах

саме галузі управління та адміністрування, а також обмежене методичне забезпечення для викладачів коледжів.

Метою цієї статті є проаналізувати сучасний стан досліджень використання доповненої реальності в програмному середовищі GeoGebra у контексті математичної освіти, зосередивши увагу на підготовці студентів коледжів. У роботі наведено приклади застосування GeoGebra AR у різних математичних галузях (аналітичній геометрії, фінансовій математиці, просторовому моделюванні), а також запропоновано методичні підходи до ефективної інтеграції цієї технології в навчальні програми. Основні висновки дослідження свідчать про позитивний вплив GeoGebra AR на результати навчання, підвищення мотивації, формування професійних і цифрових компетентностей здобувачів освіти.

Матеріали та методи (Materials and Methods)

Дослідження базувалося на змішаному підході з використанням елементів педагогічного експерименту, якісного аналізу діяльності студентів та емпіричного спостереження за навчальними результатами в умовах проєктної діяльності. Метою було вивчення впливу використання цифрових інструментів GeoGebra 3D та доповненої реальності (AR) на формування просторового мислення, аналітичних умінь та навчальної мотивації студентів економічного профілю.

У дослідженні брали участь студенти спеціальності «Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок» ВСП «Фаховий коледж економіки і технологій Державного університету економіки і технологій». Загалом було охоплено 35 осіб, які були розподілені на контрольну (КГ, 17 студентів) та експериментальну (ЕГ, 18 студентів) групи.

З метою забезпечення надійності результатів експерименту далі розглянемо його методичну організацію.

Інструментарій. У дослідженні використовувалося програмне забезпечення GeoGebra 3D Calculator (мобільна та комп'ютерна версії) з інтегрованим AR-модулем. Моделі створювались у вікні 3D Графіка, після чого переносились у доповнену реальність за допомогою мобільного пристрою з камерою. Побудови здійснювались із використанням стандартного набору інструментів.

Процедура. Учасники експериментальної групи працювали над побудовою та дослідженням тривимірних моделей (призми, паралелепіпеда, зрізаного конуса, кулі, піраміди), які проєктувались в реальне середовище за допомогою AR. Кожен студент або мінігрупа виконували серію практичних завдань та мініпроєктів: «Ігровий майданчик», «Моя кімната», «Торговий павільйон», «Економна економіка».

Методи збору даних. Збір інформації здійснювався шляхом:

- анкетування студентів (до і після виконання завдань);
- аналізу виконаних моделей;
- спостереження за динамікою розвитку навичок (просторове мислення, логічні міркування, самостійність);
- порівняння результатів ЕГ і КГ у розв'язанні аналогічних задач.

Методи аналізу. Для аналізу результатів використовувались:

- порівняльна статистика (у відсотковому вираженні);
- описово-аналітичний метод для оцінювання глибини розуміння математичних понять;
- контент-аналіз моделей, створених студентами;
- якісний аналіз усвідомлення змісту математичних залежностей та рівня аргументації рішень.

Етичні аспекти. Усі учасники експерименту були проінформовані про мету дослідження та дали усну згоду на участь. Зібрані дані використовувались виключно в навчально-наукових цілях, із дотриманням принципів конфіденційності.

Запропоновані задачі та моделі є універсальними та можуть бути адаптовані для різних рівнів складності – від базової геометрії до поглиблених курсів з елементами математичного аналізу та фінансових обчислень. Такий підхід забезпечує відкритість і повторюваність

дослідження, що є важливою умовою наукової верифікації та практичної апробації результатів у ширшому освітньому контексті.

Результати (Results)

У результаті проведеного дослідження було встановлено позитивний вплив використання цифрового інструментарію GeoGebra з функцією доповненої реальності (AR) на якість навчання стереометрії студентів фінансово-економічного профілю. Зокрема, фіксувалося покращення просторового мислення, підвищення рівня розуміння геометричних властивостей об'єктів, здатність до побудови математичних моделей та розв'язання задач прикладного змісту з оптимізаційною складовою.

Активне використання AR-моделей сприяло формуванню в учасників дослідження навичок візуалізації складних фігур, логічного аналізу взаємозв'язків між параметрами тіл у просторі, а також посиленню навчальної мотивації. У ході виконання проєктних завдань студенти демонстрували здатність не лише до математичного конструювання, а й до критичної інтерпретації результатів, перевірки гіпотез і обґрунтування власних рішень.

З метою системного аналізу отриманих результатів та представлення ключових напрямів впровадження GeoGebra AR у навчальний процес, цей розділ поділено на декілька підтем. У них детально описано етапи побудови моделей, проєктну діяльність студентів, аналіз результатів опитувань та ефективність розв'язування прикладних задач у форматі педагогічного експерименту.

Побудова та дослідження моделей у середовищі GeoGebra AR

Одним із ключових напрямів дослідницької частини стало застосування інструментів доповненої реальності у програмному середовищі GeoGebra для створення математичних моделей просторових об'єктів. З метою дослідження ефективності візуалізації та просторової інтерпретації геометричних фігур, студентам було запропоновано виконати побудову призматичних тіл у середовищі GeoGebra 3D, з подальшим проєктуванням моделі в доповнену реальність (AR). Такий підхід забезпечує безпосереднє занурення у просторові структури, що сприяє глибшому розумінню геометричних властивостей і взаємозв'язків між об'єктами.

Процес побудови математичної моделі в доповненій реальності передбачає початкове створення фігури у вікні 3D Графіка за допомогою відповідних інструментів GeoGebra. Після цього студент натискає кнопку «AR», що дає змогу перенести модель у реальне середовище за допомогою камери мобільного пристрою. Наведення камери на обране місце (наприклад, стіл, підлогу, стіну) і торкання екрана дозволяє «зафіксувати» об'єкт у фізичному просторі. Далі, використовуючи сенсорне управління, користувач може змінювати масштаб, колір, а також орієнтацію фігури.

Особливу увагу було зосереджено на побудові прямокутної призми, як одного з базових стереометричних тіл, що має практичне значення в задачах на оптимізацію. Побудова реалізується в два основних етапи: створення прямокутника як основи призми та побудова самої призми на основі цієї фігури. Етап побудови прямокутника передбачає чотири послідовні кроки: побудову відрізка в площині Оху; побудову прямої, паралельної до відрізка; проведення перпендикулярів до цієї прямої через її кінцеві точки; побудову прямокутника з точок перетину. Для цього застосовуються інструменти «Вигляд з», «Відрізок», «Паралельна пряма», «Перпендикулярна пряма» та «Многокутник». При потребі зайві побудови прибираються з вкладки «Алгебра», а параметри об'єкта (колір, розмір) редагуються вручну.

Далі відбувається побудова прямокутної призми. Студент спочатку проводить перпендикуляр до площини прямокутника, що слугує напрямом «висоти» призми. Після цього за допомогою інструмента «Призма» визначається фігура як просторовий об'єкт, утворений шляхом побудови призми на заданій основі у напрямку перпендикуляра до площини. Модель, створена в GeoGebra 3D, автоматично відображає об'єм призми у відповідному полі «Алгебра», що дозволяє одразу співвідносити її з реальними або теоретичними задачами.

Після створення об'єкта віртуальна фігура переноситься у фізичний світ за допомогою функції AR. Мобільний пристрій із камерою слугує інтерфейсом доповненої реальності: користувач може обійти фігуру, «зазирнути» всередину, зіставити її з реальними об'єктами (наприклад, книжками, коробками, меблями). Такий підхід дозволяє здійснити емпіричне дослідження просторових властивостей фігури, оцінити співвідношення геометричних розмірів, пропорцій та положення в просторі (рис. 1).

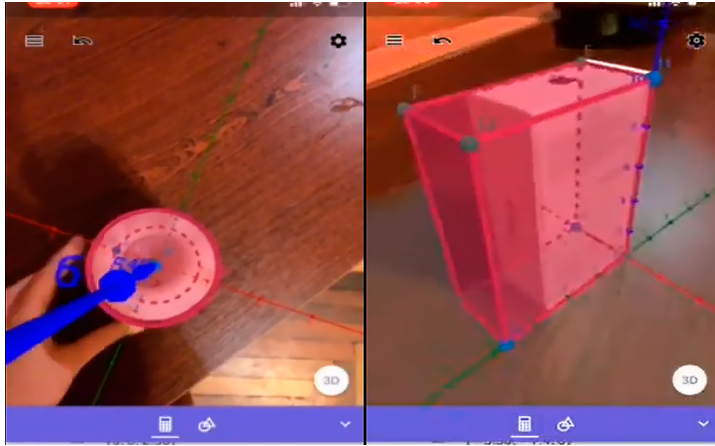


Рисунок 1. Демонстраційні програми GeoGebra AR

GeoGebra AR також дає змогу вводити у зафіксовану віртуальну фігуру реальні об'єкти у формі прямокутного паралелепіпеда, що відкриває можливості для інтерактивних навчальних експериментів. Відображення формул для обчислення об'єму або площі на екрані, можливість покрокового відкриття кожного виразу (через «Прапорці») формують у студентів логічне бачення структури обчислень та їхню залежність від параметрів фігури.

У такий спосіб реалізована в GeoGebra доповнена реальність не лише покращує просторове сприйняття, а й забезпечує цінні можливості для проведення оптимізаційних задач, вивчення властивостей подібних тіл, обчислень об'ємів і візуалізації складних геометричних зв'язків. Це, у свою чергу, позитивно позначається на розумінні студентами практичного значення математичних знань, зокрема у сфері економіки, де просторове планування, моделювання та оцінка ресурсів є важливою складовою професійної діяльності.

Проектна діяльність

Використання інформаційно-комунікаційних технологій у проектній діяльності студентів фінансово-економічного профілю не лише сприяє налагодженню ефективної комунікації між учасниками освітнього процесу, а й забезпечує можливість оперативного обміну даними, планування та виконання завдань у цифровому середовищі. ІКТ допомагають раціонально організувати процес збору, обробки та візуалізації інформації, що є особливо важливим при вирішенні математичних задач прикладного характеру. Залучення таких засобів, як GeoGebra з доповненою реальністю, сприяє не лише оптимізації управління проектом, але й забезпечує моделювання об'єктів, які відображають фінансові чи геометричні залежності у реальному або наближеному до реальності просторі (*Lainufar et al., 2021*).

Крім того, сучасні цифрові інструменти виступають не лише як платформи для інтерактивного моделювання, але й як повноцінні інструментально-вимірювальні комплекси. GeoGebra, зокрема, надає студентам можливість створювати, трансформувати та аналізувати математичні об'єкти з високим рівнем точності, вимірювати параметри моделей і здійснювати емпіричне дослідження їх властивостей. Це дозволяє формувати в студентів не лише математичні, а й аналітичні та професійно-прикладні компетентності, необхідні для діяльності у фінансовій сфері.

Завданням проекту може бути створення тривимірної моделі в додатку GeoGebra 3D ігрового майданчику, у якій основні об'єкти (гойдалки, лавки, навіси тощо) моделюються на

основі геометричних тіл – кубів, призм, конусів, сфер і пірамід (рис. 2). Робота над проєктом здійснюється у малих групах (3-4 особи) й передбачає послідовне виконання таких етапів: аналіз вимог до об'єкта, побудова геометричних моделей у середовищі GeoGebra 3D, виведення моделі в доповнену реальність за допомогою мобільного пристрою та презентація результату. У рамках цього проєкту студенти розвивають навички просторової уяви, оперування об'ємними формами, обчислення площ поверхонь і об'ємів, а також здобувають досвід колективного планування та оцінювання.

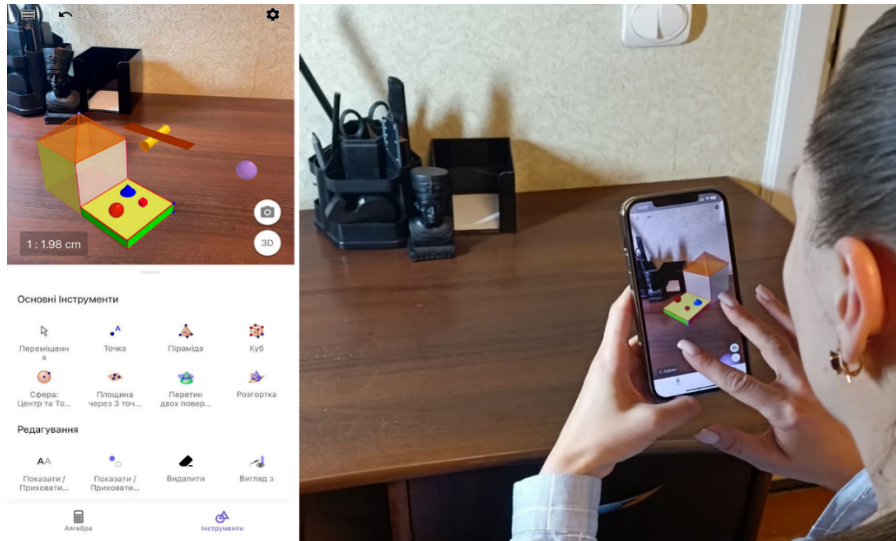


Рисунок 2. Зразок виконання проєкту «Ігровий майданчик»

Оцінювання результативності є обов'язковим елементом організації роботи над проєктом. Результативність проєкту полягає у співвідношенні запланованих очікувань з кінцевими результатами роботи. Створені розробки можна спроектувати на подвір'ї за допомогою додатку з доповненою реальністю.

Проєкт «Моя кімната» має на меті відтворення інтер'єру власної кімнати або іншого обраного приміщення шляхом побудови об'єктів меблів і декору з використанням простих геометричних форм. Студенти аналізують пропорції та взаєморозміщення предметів у просторі, визначають їх приблизні розміри, підбирають колірну гаму та реалізують цифрову 3D-модель в GeoGebra. Подальше використання AR-функції дозволяє вивести модель у реальне середовище – наприклад, на поверхню парти, столу або в аудиторії – для критичного оцінювання естетики та функціональності композиції. Проєкт формує навички математичного моделювання, дизайнерського мислення та практичного застосування понять масштабу, симетрії, об'єму і площі.

Обидва проєкти передбачають можливість варіативності та інтеграції міждисциплінарних зв'язків – зокрема, з основами фінансової грамотності (оцінка вартості матеріалів чи об'єктів), інформатикою (цифрове моделювання), технологіями (конструювання) та образотворчим мистецтвом (візуальний стиль, композиція). Участь у таких проєктах сприяє глибшому засвоєнню математичних понять, підвищенню інтересу до предмета та формуванню комунікаційних і проєктних умінь, що є важливою складовою професійної підготовки студентів коледжу.

Завданням проєкту «Міні-бізнес: проєктування торгового павільйону» може бути створення тривимірної моделі мобільного торгового приміщення (наприклад, вуличної кав'ярні, кіоску або мінімагазину), яка дозволяє студентам застосувати знання з геометрії до розв'язання практичних прикладних задач, пов'язаних із розмірами, площами, об'ємами та орієнтовними витратами на будівництво. Проєкт передбачає етапи: аналіз функціонального призначення павільйону, побудова геометричних елементів моделі у GeoGebra 3D (використання тіл на основі призми, паралелепіпеда, піраміди, циліндра), розрахунок площ

поверхонь для визначення обсягів матеріалів, а також кошторисна оцінка на основі реальних цін за одиницю площі чи об'єму.

Завдяки можливості виведення моделі у доповнену реальність студенти мають змогу оцінити її масштабність, просторову відповідність і візуальну структуру безпосередньо в класному середовищі або на території закладу освіти. Підсумковим етапом є презентація проєкту з поясненням математичних обчислень, конструктивних рішень та економічного обґрунтування. За бажанням, до моделі можуть бути додані індикатори прогнозованого прибутку, точки розміщення обладнання, або міні-фінансовий план реалізації проєкту.

У контексті компетентнісного навчання та інтеграції математичних знань із реальними прикладними ситуаціями особливу педагогічну цінність становлять міжпредметні навчальні проєкти, що поєднують математику з елементами економіки, інформатики, технологій. Одним із таких проєктів є «Економна економіка», спрямований на розвиток прикладного математичного мислення у студентів коледжу, зокрема тих, хто навчається за фінансово-економічними спеціальностями.

Проєкт реалізується у форматі роботи в мінігрупах і передбачає міжпредметну інтеграцію змісту таких дисциплін, як алгебра, початки аналізу, геометрія, економіка, інформатика та креслення. У рамках цього навчального досвіду студенти отримують можливість не лише використовувати математичні методи для розв'язання задач практичного змісту, а й працювати з різноманітними цифровими інструментами – від динамічних середовищ моделювання (GeoGebra) до графічних редакторів та програм для 3D-друку. Завдяки цьому забезпечується розвиток як математичних, так і цифрових компетентностей.

Основна дидактична ідея проєкту полягає в опрацюванні прикладних задач, які, будучи сформульованими у реальному контексті, розв'язуються засобами шкільної/коледжевої математики. Задачі такого типу повинні відповідати кільком критеріям: мати практичну цінність, бути сформульованими доступною мовою без надмірної термінології, узгоджуватись зі змістом чинних навчальних програм. Особливе місце займають задачі евристичного характеру, які стимулюють творчість, гнучкість мислення, здатність переносити знання в нові ситуації, бачити знайоме в незнайомому – тобто формують основи STEM-компетентностей.

У межах проєкту студентам пропонується прикладна оптимізаційна задача: знайти розташування пішохідного переходу між двома населеними пунктами А і В таким чином, щоб маршрут пішохода був найкоротшим. У геометричній інтерпретації задача зводиться до побудови ламаної ACDB із перпендикулярним відрізком CD до заданих паралельних прямих, де мінімізується загальна довжина маршруту. Для цього застосовується програмне середовище GeoGebra, що дозволяє не лише побудувати графічну модель, а й провести інтерактивне дослідження з використанням інструменту «Прапорець» та можливості динамічного переміщення об'єктів.

Розв'язання задачі здійснюється за етапами:

1. Побудова математичної моделі – визначення умов задачі, аналіз конструктивних вимог, формулювання оптимізаційної мети;
2. Побудова графічного рішення – створення динамічної моделі у GeoGebra з можливістю зміни параметрів;
3. Математичне доведення – обґрунтування оптимальності вибраного рішення на основі властивостей симетрії та відстаней;
4. Дослідження – варіативне моделювання змінних параметрів (розташування населених пунктів, зміщення ліній), що дозволяє студентам зробити висновок про сталість структури розв'язку незалежно від положення об'єктів.

GeoGebra у цьому контексті виконує функцію як засобу побудови математичних моделей, так і віртуальної лабораторії для проведення емпіричних досліджень. Завдяки інтерактивності середовища, студенти можуть безпосередньо спостерігати вплив змінних на результат, що сприяє глибшому розумінню суті задачі, розвитку здатності до математичного експерименту й формуванню стійкої мотивації до вивчення математики.

Завершальним етапом реалізації проєкту може бути виготовлення макету маршруту або об'єкта оптимізації за допомогою підручних матеріалів або 3D-друку на основі побудованої

моделі, що ще більше підсилює практичну значущість завдання. Таким чином, проєкт «Економна економіка» поєднує математичну модель, економічну мотивацію та технічну реалізацію, виступаючи ефективним засобом формування як фахових, так і загальнопредметних компетентностей майбутніх фінансових фахівців.

Студентам Відокремленого структурного підрозділу «Фаховий коледж економіки і технологій Державного університету економіки і технологій» було запропоновано виконати мініпроєкти у GeoGebra 3D, такі як:

- проєктування ігрового майданчика;
- моделювання інтер'єру кімнати;
- міні-бізнес: проєктування торгового павільйону.

Робота велася у три етапи: планування, побудова в GeoGebra, проєкція у доповнену реальність. Проєкти оцінювалися за критеріями: математична точність, креативність, кількість використаних тіл, презентація. У ході реалізації проєктів у студентів формувалися наступні компетентності: STEM-компетентності (логіка, просторове мислення, міждисциплінарність); Soft skills (робота в групах, презентація результатів, оцінка якості).

Використання GeoGebra AR сприяло глибшому розумінню абстрактних понять, зокрема співвідношення частин тіл у просторі. Студенти ЕГ продемонстрували вищий рівень мотивації та інтересу до виконання задач, порівняно з КГ. Проєктна діяльність сприяла кращому засвоєнню термінів та методів побудови, розвитку логічного та критичного мислення.

Крім того, подібні завдання створюють сприятливе середовище для міждисциплінарної інтеграції, що особливо важливо у підготовці фінансистів, які повинні вміти застосовувати математичні інструменти для розв'язання практичних задач економічного змісту. Робота з GeoGebra AR стимулює інтерес до самостійного пізнання, формує здатність аналізувати ситуації, приймати обґрунтовані рішення в умовах змінних параметрів і моделювати реальні об'єкти у цифровому форматі.

Залучення студентів до таких проєктів дозволяє не лише поглибити знання зі стереометрії, але й забезпечує розвиток універсальних навичок ХХІ століття – комунікації, креативності, співпраці та вирішення проблем. У результаті математичне навчання набуває додаткового сенсу, такого як засобу формування аналітичного мислення, просторової уяви та професійної самореалізації здобувачів освіти в галузі управління та адміністрування.

Стереометричні задачі прикладного змісту

Геометрія, як одна з найдавніших і водночас фундаментальних галузей математики, нерідко сприймається студентами як абстрактна та відірвана від реального життя. Особливо це стосується стереометрії – розділу, що потребує розвинутого просторового мислення та візуалізації, а також розуміння взаємозв'язків між геометричними фігурами у тривимірному просторі. Відсутність прикладної спрямованості у викладанні геометрії нерідко призводить до втрати мотивації до її вивчення. Водночас залучення реалістичних задач і цифрових засобів моделювання створює умови для підвищення зацікавлення студентів та розвитку ключових компетентностей.

З метою подолання зазначених труднощів під час реалізації міждисциплінарного навчального проєкту «Економна економіка» студентам спеціальності «Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок» ВСП «Фаховий коледж економіки та технологій ДУЕТ» було запропоновано задачі прикладного змісту, що ґрунтуються на реаліях виробництва, економічної доцільності та оптимізації просторових характеристик об'єктів. Їх розв'язання передбачало застосування програмного середовища GeoGebra 3D, яке дозволяло створювати динамічні моделі, здійснювати візуалізацію умов задачі та проводити дослідження в інтерактивному форматі.

Задача 1. Скільки відсотків деревини йде у відходи при виготовленні з дерев'яної колоди, завдовжки 5 м та діаметром основ 20 см і 15 см, балки з перерізом у формі прямокутника максимальної площі поперечного перерізу?

Задача 2. Обчисліть об'єм найбільшого бруса з основою у формі прямокутника, який можна витесати з колоди циліндричної форми. Довжина колоди – 5 м, діаметр – 20 см. Який відсоток деревини при цьому піде у відходи?

Ці задачі, пов'язані з темами вписаних тіл, площ поперечного перерізу, об'ємів і залишкових матеріалів, були інтегровані в контекст оптимізації витрат матеріалів – навички, що мають безпосереднє прикладне значення для фахівців фінансово-економічного профілю. Візуалізація умов задачі та побудова моделей у GeoGebra сприяли глибшому розумінню суті математичних залежностей, дозволяли спостерігати взаємозв'язки між параметрами та оцінювати ефективність різних підходів до розв'язання.

Для перевірки ефективності такого підходу було організовано експериментальне дослідження за участі двох паралельних навчальних груп. До експериментальної групи (ЕГ) увійшли 18 студентів, які розв'язували задачі з використанням GeoGebra 3D, зокрема з динамічним переглядом побудованих моделей. У контрольній групі (КГ, 17 студентів) задачі розв'язувалися традиційним способом, за статичними ілюстраціями. Анкетування дозволило дослідити розуміння студентами геометричних понять на кожному з етапів.

На першому етапі студенти відповідали на запитання щодо фігур, які фігурують у задачі, та їх просторового розміщення. Позитивні відповіді в обох групах коливалися в межах 35–41%. Найнижчі результати спостерігалися при відповіді на ключове запитання задачі: якої форми має бути поперечний переріз балки, щоб об'єм був максимальним. У КГ позитивну відповідь дали 4 студенти (24%), в ЕГ – 3 студенти (17%).

На другому етапі, після демонстрації рисунку (на папері для КГ та у GeoGebra з динамічною побудовою для ЕГ), рівень розуміння зростає. У КГ кількість правильних відповідей збільшується до 6 (35%), тоді як в ЕГ – до 9 (50%). Аналогічна тенденція спостерігається й у питанні про відходи деревини – у КГ правильну відповідь дали 53% студентів, в ЕГ – 67%.

Динамічна побудова моделі у GeoGebra (рис. 3) включала етапи створення зрізаного конуса, побудови вписаного квадрата в меншу основу та побудови відповідної призми. Модель дозволяла змінювати параметри у режимі реального часу, досліджуючи залежність об'єму від форми перерізу.

Результати анкетування свідчать, що саме використання динамічних моделей у GeoGebra значно покращує якість розуміння задач стереометрії прикладного змісту. Такий підхід не лише формує глибше математичне бачення, але й сприяє розвитку прикладного мислення, що є критично важливим для професійної підготовки студентів.

Використання доповненої реальності в експериментальній групі дозволило значно покращити якість засвоєння навчального матеріалу. Особливу увагу приділено задачам на вписування і описування геометричних тіл, зокрема: побудова кулі, вписаної в правильну чотирикутну піраміду; використання інструментів GeoGebra 3D: Right Polygon, Segment, Intersection Point, Pyramid, Plane, Sphere тощо; візуалізація фігури в доповненій реальності за допомогою мобільного пристрою.

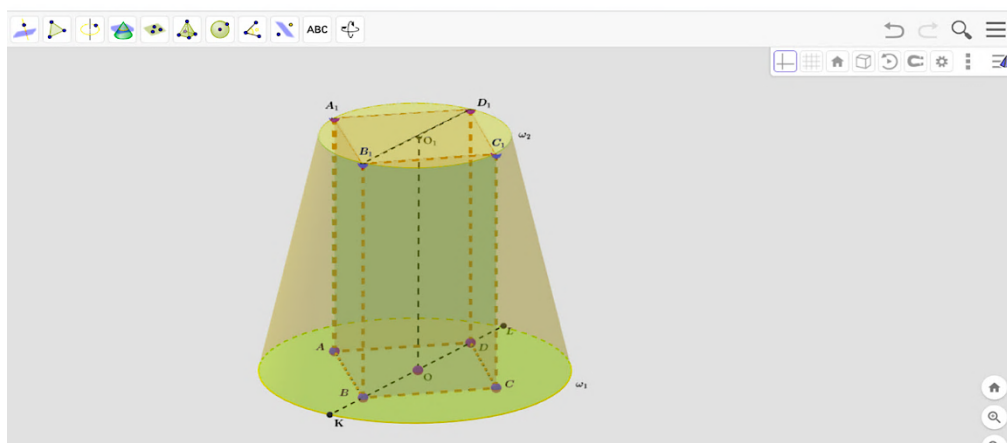


Рисунок 3. Паралелепіпед, вписаний в зрізаний конус

Результати показали, що взаємодія зі створеними AR-моделями дозволила студентам краще розуміти співвідношення між площинами, ребрами, висотами та центрами описаних/вписаних фігур, а також сформувала здатність до просторового аналізу складних геометричних конструкцій, що, у свою чергу, забезпечує глибше усвідомлення математичних залежностей і підвищує готовність до їх практичного застосування у професійній сфері.

Висновки (Conclusions)

Отримані результати експериментального дослідження підтверджують ефективність використання середовища GeoGebra 3D та технологій доповненої реальності у процесі навчання математики фахівців з фінансів. Застосування GeoGebra AR суттєво покращує розуміння просторових властивостей об'єктів, сприяє формуванню ключових математичних компетентностей і підвищує мотивацію до навчання.

Аналіз виконаних студентських мініпроектів, опрацювання прикладних стереометричних задач та результати анкетування показали, що в експериментальній групі було зафіксовано більш високий рівень засвоєння матеріалу, особливо в аспектах просторового мислення, візуалізації, логічного обґрунтування та прикладного аналізу. Робота з динамічними моделями сприяла розвитку гнучкості мислення, здатності до дослідження та перенесення знань у практичні контексти, що є важливими складовими сучасної професійної освіти.

Поєднання навчальних завдань з цифровими інструментами моделювання, інтеграція міждисциплінарного змісту та проєктна діяльність дозволили сформувати у студентів не лише математичні, а й загальнопрофесійні компетентності, пов'язані з плануванням, аналізом, комунікацією та оцінюванням ефективності рішень. GeoGebra AR є потужним засобом для трансформації традиційного навчального процесу у дослідницько-орієнтоване, технологічно збагачене середовище.

Таким чином, результати дослідження демонструють потенціал використання GeoGebra AR не лише як візуалізаційного інструменту, але й як повноцінного засобу формування глибокого розуміння математичних понять і розвитку аналітичного, критичного та інженерного мислення в контексті професійної підготовки фахівців галузі управління та адміністрування.

Конфлікт інтересів (Conflicts of interest)

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Фінансування (Funding)

Це дослідження не отримало зовнішнього фінансування.

Література (References)

- Batubara, I. H., Saragih, S., Simamora, E., Napitupulu, E. E., Nuraini, N., Sari, D. N., Anim, A., Sari, I. P., Rahmadani, E., & Syafitri, E. (2022). Improving student mathematics communication ability through problem-based learning assisted by augmented reality based on culture. *AIP Conference Proceedings*, 2659, 5. <https://doi.org/10.1063/5.0113258>
- Cheong, K. H., Chu, C. E., Ng, W. K., & Yeo, D. J. (2024). Implementing GeoGebra 3D Calculator with Augmented Reality in multivariable calculus education. *IEEE Access*, 12, 85455–85464. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2024.3394531>

- Garzón, J., & Acevedo, J. (2020). Meta-analysis of the impact of Augmented Reality on students' learning gains. *Educational Research Review*, 27, 100254, 244–260. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2019.04.001>
- Garzón, J., Pavón, J., & Baldiris, S. (2019). Systematic review and meta-analysis of augmented reality in educational settings. *Virtual Reality*, 23(4), 447–459. <https://doi.org/10.1007/s10055-019-00379-9>
- Ibáñez, M.-B., & Delgado-Kloos, C. (2018). Augmented reality for STEM learning: A systematic review. *Computers & Education*, 123, 109–123. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2018.05.002>
- Lainufar, M., Mailizar, M., & Johar, R. (2021). Exploring the potential use of GeoGebra augmented reality in a project-based learning environment: The case of geometry. *Journal of Physics: Conference Series*, 1882(1), 012045. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1882/1/012045>
- Lytvynova, S., Burov, O., & Semerikov, S. (2020). Conceptual approaches to the use of augmented reality means within the educational process. *Modern Information Technologies and Innovation Methodologies of Education in Professional Training: Methodology, Theory, Experience, Problems*, 55, 46–62. <https://doi.org/10.31652/2412-1142-2020-55-46-62>
- Shabanova, M., Bezumova, O., Zatsepina, E., Malysheva, S., Kotova, S., & Ovchinnikova, R. (2020). Learning stereometry in a secondary school within GeoGebra's augmented reality app. *Journal of Physics: Conference Series*, 1691(1), 012115. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1691/1/012115>
- Petrov, P. D., & Atanasova, T. V. (2020). *Developing Spatial Mathematical Skills Through Augmented Reality and GeoGebra*. In *ICERI2020 Proceedings* (pp. 5719–5723). ICERI. <https://doi.org/10.21125/iceri.2020.1229>
- Rashevskaya, N. V., Semerikov, S. O., Zinonos, N. O., Tkachuk, V. V., & Shyshkina, M. P. (2020). Using augmented reality tools in the teaching of two-dimensional plane geometry. In O. Y. Burov & A. E. Kiv (Eds.), *Proceedings of the 3rd International Workshop on Augmented Reality in Education, Kryvyi Rih, Ukraine, May 13, 2020* (CEUR Workshop Proceedings, Vol. 2731, pp. 79–90). CEUR-WS.org. <https://ceur-ws.org/Vol-2731/paper03.pdf>
- Vakaliuk, T. A., & Pochtoviuk, S. I. (2021). Analysis of tools for the development of augmented reality technologies. In S. H. Lytvynova & S. O. Semerikov (Eds.), *Proceedings of the 4th International Workshop on Augmented Reality in Education (AREdu 2021), Kryvyi Rih, Ukraine, May 11, 2021* (CEUR Workshop Proceedings, Vol. 2898, pp. 119–130). CEUR-WS.org. <https://ceur-ws.org/Vol-2898/paper06.pdf>